Równania różniczkowe drugiego rzędu sprowadzalne do równań pierwszego rzędu.

Zostaną omówione tylko niektóre wybrane typy takich równań.

A. Równanie typu $F(x, y', y'') = 0$ (1)
(zauważmy, że nie występuje funkcja niewiadoma y).

Za pomocą podstawienia $y' = u$ wprowadzamy nową funkcję niewiadomą $u(x)$.

Mamy stąd $y'' = u'$, skąd wynika, że rozwiązanie rozpatrywanego równania (1) można sprowadzić do rozwiązywania równania:

$F(x, u, u') = 0$ (2).

Niech całka ogólna równania (2) ma postać: $\phi(x, u, C_1) = 0$

Uwzględniając, że $y' = u$ otrzymujemy równanie różniczkowe pierwszego rzędu:

$\phi(x, y', C_1) = 0$ (3) z funkcją niewiadomą $y(x)$.

Rozwiązując równanie (3) otrzymamy całkę ogólną równania (1). W tej całce wystąpi oprócz stałej C_1 jeszcze jedna stała C_2.

Przykład 1
Znaleźć całkę szczególną równania różniczkowego:

$y'' = y' \cdot \ln y'$ (4)

spełniającą warunek początkowy $y(0) = 2$ i $y'(0) = 1$.

Wprowadzamy nową funkcję niewiadomą $u(x)$ za pomocą podstawienia:

$y' = u(x)$ (5)

W ten sposób rozwiązywanie równania (4) sprowadzimy do rozwiązywania równania pierwszego rzędu:

$u' = u \cdot \ln u$ (6).

Całka ogólna eównania (6) ma postać $\ln u = C_1 \cdot e^x$

(bo $u' = u \cdot \ln u$ skąd $\dfrac{du}{dx} = u \cdot \ln u$ albo $\dfrac{du}{u \cdot \ln u} = dx$
więc $\displaystyle\int \frac{\frac{1}{u}\,du}{\ln u} = \int dx$ stąd $\ln(\ln u) + \ln C = x$

Dalej otrzymujemy $\ln(C \cdot \ln u) = x$

Z powyższego mamy $e^x = C \cdot \ln u$ czyli $\ln u = \dfrac{e^x}{C} = C_1 \cdot e^x$)

Wobec (5) mamy $\ln y' = C_1 e^x$.

Korzystając z drugiego warunku początkowego znajdujemy $C_1 = 0$.

Zatem $y' = e^0 = 1$ z czego otrzymujemy $y = x + C_2$.

Korzystając z pierwszego warunku początkowego mamy dla $x = 0$ $2 = y(0) = 0 + C_2$ czyli $C_2 = 2$.

Ostatecznie:

$y = x + 2$ jest szczególną całką równania różniczkowego równania (4) przy podanych warunkach początkowych.

B. Równania typu $F(y, y', y'') = 0$ (7)

W równaniu tego typu nie występuje zmienna niezależna x. W równaniu (7) będziemy traktować y jako zmienną niezależną nowej niewiadomej funkcji $u(y)$, którą wprowadzimy za pomocą podstawienia:

$y' = u(y)$ (8)

Otrzymamy zatem $y'' = u'(y) \cdot y' = u' \cdot u$. Wynika stąd, że można sprowadzić rozwiązywanie równania (7) do rozwiązywania równania :

$F(y, u, , u \cdot u') = 0$ (9)

Niech $\phi(y, u, C_1) = 0$ będzie całką ogólną rownania (9). W całce tej oprócz stałej C_1 wystąpi jeszcze druga stała C_2.

Przykład 2

Znaleźć całkę ogólną równania różniczkowego:

$1 + (y')^2 = 2yy''$ (10)

Wprowadzając nową funkcję niewiadomą $u = u(y)$ za pomocą podstawienia (8) mamy też:

$y'' = u'y' = u'u$

Otrzymujemy zatem równanie pierwszego rzędu:

$2yuu' = 1 + u^2$ (11)

Całka ogólna równania (11) ma postać $1 + u^2 = C_1 y$, bo $1 + u^2 = 2yu\dfrac{du}{dy}$

Dalej $1 = \dfrac{2u}{1+u^2} \cdot y \cdot \dfrac{du}{dy}$. Stąd po podzieleniu przez y mamy:

$\dfrac{1}{y} = \dfrac{2u}{1+u^2} \cdot \dfrac{du}{dy}$

Po pomnożeniu przez dy mamy $\dfrac{dy}{y} = \dfrac{2u\,du}{1+u^2}$

Po scałkowaniu otrzymujemy $\ln y = \ln(1 + u^2) + \ln C$ czyli $\ln y = \ln C(1 + u^2)$

Stąd $y = C(1 + u^2)$ lub $1 + u^2 = C_1 y$, gdzie: $(C_1 = \dfrac{1}{C})$

Wobec (8) mamy $(y')^2 = C_1 y - 1$, bo z $1 + u^2 = C_1 y$ wynika, że $u^2 = C_1 y - 1$.

Ale ponieważ $y' = u$ więc $(y')^2 = u^2$.

Otrzymujemy $y' = \pm\sqrt{C_1 y - 1}$.

Po scałkowaniu ostatniej równości otrzymamy całkę ogólną równania (10) postaci:

$$y = \frac{C_1}{4}(C_2 \pm x)^2 + \frac{1}{C_1}$$

Równania różniczkowe drugiego rzędu o stałych współczynnikach

Definicja 1
Równanie różniczkowe postaci:

$$y'' + py' + qy = 0 \qquad (12)$$

gdzie: p i q są danymi liczbami rzeczywistymi
nazywamy jednorodnym równaniem różniczkowym liniowym drugiego rzędu o stałych współczynnikach.

Rozwiązania równania (12) poszukujemy w postaci funkcji wykładniczej:

$$y = e^{rx} \qquad (13)$$

gdzie: liczba r jest liczbą niewiadomą, którą postaramy się tak dobrać, aby funkcja (13) spełniała równanie (12).

Ponieważ $y' = re^{rx}$ oraz $y'' = r^2 e^{rx}$ więc funkcja (13) spełnia równanie (12) wtedy i tylko wtedy, gdy liczba r jest pierwiastkiem równania kwadratowego:

$$r^2 + pr + q = 0 \qquad (14)$$

Równanie (14) nazywa się równaniem charakterystycznym dla równania (12)

Uwaga
Po podstawieniu $y' = re^{rx}$ i $y'' = r^2 e^{rx}$ i $y = e^{rx}$ do równania (12) otrzymujemy:

$$r^2 \cdot e^{rx} + p \cdot re^{rx} + q \cdot e^{rx} = 0$$

Po wyłączeniu e^{rx} przed nawias otrzymamy:

$$e^{rx}(r^2 + pr + q) = 0 \qquad (*)$$

Ponieważ $e^{rx} > 0$ dla dowolnego r i x więc aby równanie (*) było spełnione to spełnione musi być:

$$r^2 + pr + q = 0$$

Rozpatrzymy przypadki możliwych rozwiązań równania (12)

A. Przypadek $\Delta = p^2 - 4q > 0$

Równanie (14) ma wtedy dwa różne pierwiastki rzeczywiste r_1 i r_2.

Funkcje $y_1(x) = e^{r_1 x}$ i $y_2(x) = e^{r_2 x}$ są więc rozwiązaniami równania (12).

Wzór $y = C1 \cdot e^{r_1 x} + C_2 \cdot e^{r_2 x}$przedstawia zatem rozwiązanie ogólne równania (12).

<u>Przykład 3</u> Znaleźć rozwiązanie ogólne równania:

$y'' + 5y' + 4y - 0$ (15)

Równanie charakterystyczne jest postaci: $r^2 + 5r + 4 = 0$. Zatem $\Delta = 9$ więc $r_1 = -1$ oraz $r_2 = -4$.

Ostatecznie $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-4x}$ jest całką ogólną równania (15).

B. <u>Przypadek $\Delta = p^2 - 4q = 0$</u>

Równanie charakterystyczne ma w tym przypadku dwa równe co do wartości pierwiastki rzeczywisteo wartości $r_0 = \frac{-p}{2}$ (czasem mówi się że w tej sytuacji jest jeden pierwiastek podwójny).

Dysponujemy więc dopiero jedną całką szczególną $y_1 = e^{r_0 x}$.
Zauważmy, że $y = Ce^{r_o x}$ jest także całką tego równania dla każdej wartości stałej C.

Całkę ogólną równania (12) znajdujemy metodą uzmienniania stałej. W tym celu szukamy rozwiązania równania (12) w postaci:

$y = C(x) \cdot e^{r_0 x}$ (16)

gdzie: $C(x)$ jest chwilowo nieznaną funkcją.

Stąd:

$$\begin{cases} y' = C'(x) \cdot e^{r_0 x} + C(x) \cdot r_0 \cdot e^{r_0 x} \\ y'' = C''(x) \cdot e^{r_0 x} + 2r_0 \cdot C'(x) \cdot e^{r)0x} + r_0^2 \cdot C(x) \cdot e^{r_0 x} \end{cases} \qquad (17)$$

Podstawiając prawe strony wzorów (16) i (17) do równania (12) a następnie dzieląc je obustronnie przez $e^{r_0 x}$ otrzymamy:

$C''(x) + (2r_0 + p) \cdot C'(x) + (r_0^2 + pr_0 + q) \cdot C(x) = 0$

Ponieważ r_0 jest pierwiastkiem podwójnym równania $r^2 + pr + q = 0$

więc $2r_0 + p = 0$ oraz $r_0^2 + pr_0 + q = 0$.

Wynika z tego, że $C''(x) = 0$ dla każdego x.

Czyli po dwukrotnym scałkowaniu $C(x) = C_1 \cdot x + C_2$

Funkcja $y = (C_1 \cdot x + C_2) \cdot e^{r_0 x}$ spełnia zatem równanie (12) dla wszystkich wartości stałych C_1 i C_2.

W szczególności dla $C_1 = 1$ i $C_2 = 0$. Czyli funkcja $y_2 = x \cdot e^{r_0 x}$ jest całką tego równania.
Zatem $y_1 = e^{r_0 x}$ oraz $y_2 = x \cdot e^{r_0 x}$ są całkami równania (12)

Ostatecznie rozwiązaniem ogólnym równania (12) w przypadku $\Delta = 0$ jest:

$y = (C_1 \cdot x + C_2) \cdot e^{r_0 x} \qquad (18)$

Przykład 4 Znaleźć rozwiązanie ogólne równania:

$y'' + 4y' + 4y = 0 \qquad (19)$

Równanie charakterystyczne ma postać $r^2 + 4r + 4 = 0$. Pierwiastkiem podwójnym jest $r_0 = -2$.

Zatem na podstawie wzoru (18) mamy całkę ogólną równania (19) postaci:

$y = (C_1 \cdot x + C_2) \cdot e^{-2x}$

C. Przypadek $\Delta = p^2 - 4q < 0$

Równanie charakterystyczne ma w tym przypadku dw różne pierwiastki zespolone sprzężone: $r_1 = \alpha + i \cdot \beta$ oraz $r_2 = \alpha - i \cdot \beta$

Funkcje zespolone zmiennej rzeczywistej postaci:

$y_1^*(x) = e^{(\alpha + i\beta)x}$ oraz $y_2^*(x) = e^{(\alpha - i\beta)x}$ są więc całkami równania (12)

Na podstawie wzoru Eulera: $e^{i\phi} = \cos\phi + i \cdot \sin\phi$ mamy:

$y_1^*(x) = e^{\alpha x} \cdot e^{i\beta x} = e^{\alpha x} \cdot (\cos\beta x + i \cdot \sin\beta x) = e^{\alpha x}\cos\beta x + i \cdot e^{\alpha x}\sin\beta x$

Zatem $y_1(x) = e^{\alpha x}\sin\beta x$ oraz $y_2(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x$ są także całkami równania (12).

Funkcja $y = e^{\alpha x}(C_1 \sin\beta x + C_2 \cos\beta x)$ jest całką ogólną równania (12).

Przykład 5 Rozwiązać równanie różniczkowe:

$y'' + y' + y = 0 \qquad (20)$

Równanie charakterystyczne jest postaci $r^2 + r + 1 = 0$

$\Delta = 1 - 4 = -3$, $\sqrt{\Delta} = i \cdot \sqrt{3}$

Więc pierwiastkami są: $r_1 = -\frac{1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ oraz $r_2 = -\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

Zatem

$y_1^*(x) = e^{\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)}$ oraz $y_2^*(x) = e^{\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)}$

Wykorzystując wzór Eulera otrzymujemy:

$$y_1^*(x) = e^{-\frac{1}{2}x} \cdot e^{i\frac{\sqrt{3}}{2}x} = e^{-\frac{x}{2}}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}x\right) = e^{-\frac{x}{2}} \cdot \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + i \cdot e^{-\frac{x}{2}} \cdot \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$$

Zatem $y_1(x) = e^{-\frac{x}{2}} \cdot \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$ oraz $y_2(x) = e^{-\frac{x}{2}} \cdot \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x$ stanowią układ całek podstawowych dla równania (20).

Więc całka ogólna równania (20) jest postaci:

$$y = e^{-\frac{x}{2}}\left(C_1 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$$

Definicja 2 (Układ podstawowy całek równania różniczkowego)

Dwie całki $y_1(x)$ i $y_2(x)$ równania różniczkowego $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ w przedziale (a,b) nazywamy układem podstawowym całek tego równania jeżeli:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0 \text{ dla każdego } x \in (a,b)$$

Powyższy wyznacznik nazywamy wrońskianem. Pojęcie wprowadził Józef Maria Wroński (1778 - 1853).

Twierdzenie 1

Jeżeli funkcja $W = W(x) + iV(x)$ jest całką równania $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ z rzeczywistymi współczynnikami $p(x)$ i $q(x)$ w przedziale (a,b), to jej część rzeczywista $W(x)$ i część urojona $V(x)$ są także całkami tego równania w przedziale (a,b).